ЛЕКЦИЯ
по теме «Элементы теории множеств»

Теория множеств занимается изучением свойств как произвольных множеств, так и множеств специального вида независимо от природы образующих их объектов. Терминология и многие результаты теории множеств широко используются в математике, например, в алгебре, математическом анализе, геометрии и теории вероятностей.

Под множеством понимается совокупность (набор) каких-либо объектов, связанных между собой определенным свойством. Объекты называются элементами множества. Свойство, которым связаны эти объекты, называется характеристическим. Существует два существенно различных способа задания множеств: можно перечислить все объекты, входящие в данное множество, а можно сформулировать правило для определения того, принадлежит или не принадлежит рассматриваемому множеству данный объект (другими словами необходимо сформулировать характеристическое свойство). Множество обозначается большими буквами латинского алфавита A, B, C,..., а его элементы при этом заключаются в фигурные скобки. Например, A = {a,b,c.d,...}. Если мы хотим задать множество с помощью характеристического свойства, то оно просто записывается в фигурных скобках. Например, D = {положительные четные числа, не превышаюшие 33}. Или, C = {(x;y)| |x|≤2}. Множество может быть конечным (счетным), т. е. его элементы можно пересчитать, а если его элементы пересчитать и каждому присвоить номер, то множество станет упорядоченным. Множество может быть бесконечным, т. е. его элементы пересчитать невозможно. Примером такого множества может служить множество действительных чисел, множество точек плоскости, множество атомов во Вселенной. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается {Ø}. Вот что говорит о пустом множестве П.С. Александров: «Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль. Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, так как, может быть какой-нибудь капитан и завез какого-нибудь страуса за Полярный круг». Существует и так называемое универсальное множество U, которое содержит вообще все элементы. Два множества называются *равными*, если они состоят из одинаковых элементов. При графическом изображении множеств удобно использовать *диаграммы Венна*, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника.

Если какое-то множество B целиком входит в другое множество A, то говорят, что множество B является подмножеством множества A и обозначают B ⊄ A. Если мы говорим о принадлежности или не принадлежности какого-то элемента некоторому множеству, то используем знак «принадлежности» или «не принадлежности», который используем в математике.

Над множествами можно выполнять следующие операции: объединение, пересечение, разность, дополнение. *Объединением* двух множеств A и B называется такое множество *AUB,* которое состоит из всех элементов этих множеств. Одинаковые элементы множеств не повторяются. *Пересечением* двух множеств A и B называется такое множество *A∩B*, которое состоит из элементов, входящих одновременно в оба эти множества. Если общих элементов нет, то в пересечении получается пустое множество. *Разностью* двух множеств A и B называется такое множество *A\B,* которое состоит из элементов множества A, не входящих в множество B. Причем при выполнении данной операции порядок множеств A и B играет существенную роль. *Симметричной разностью* двух множеств A и B называется множество *AΔB* являющееся объединением разностей множеств A\B и B\A, т. е. *AΔB=(A\B)U(B\A)*. *Дополнением* множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству A, т. е. A=U\A, где U-универсальное множество.

Основные законы операций над множествами.

1. A∪B=B∪A и A∩B=B∩A переместительные законы объединения и пересечения.
2. (A∪B)∪C=A∪(B∪C) и (A∩B)∩C=A∩(B∩C) сочетальные законы объединения и пересечения.
3. A∪Ш=A; A∩Ш=A; A\Ш=A; A\A=Ш.
4. A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C); A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C).

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть книги, люди, деньги, числа... Для математики особо важную роль играют множества, составленные из любых математических объектов. Примерами числовых множеств могут служить N-множество натуральных чисел, Z-множество целых чисел, Q-множество рациональных (дробных) чисел, R-множество действительных чисел; а так же арифметическая и геометрическая прогрессии. Если же рассматриваать множество точек на плоскости, удовлетворяющих определенному условию, то можно говорить о графике этого множества. Рассмотрим два множества A и B. Если каждому элементу множества A некоторым способом поставлен в соответствие один элемент из множества B, то говорят, что задано отображение множества A во множество B. Если каждый элемент множества B соответствует какому-либо элементу множества A, то говорят, что множество A отображается во множество B. Отображение числового множества D в числовое множество E называют функцией и записывают *y=f(x)*. Множество D называют областью определения функции, xнезависимая переменная (аргумент). Множество E называют областью значений, y-зависимая переменная (функция). Существуют следующие способы задания функций: табличный, графический, аналитический. При задании функции табличным способом составляется таблица, в которой в определенном порядке записывают ряд значений аргумента и соответствующие им значения функции. Такой способ чаще всего используется при определении результатов эксперимента. Широко известны таблицы значений тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д. Графический способ: графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами (x;y), где x-некоторое значение аргумента, а y-соответствующее ему значение функции. Точки, отмеченные на координатной плоскости, соединяют плавной кривой и получается график, соответствующий некоторой функции. При аналитическом способе задания функция определяется с помощью аналитического выражения, т. е. формулы, указывающей какие действия и в каком порядке надо произвести над значениями аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Выделяют следующие виды элементарных функций: дробно-рациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Наиболее распространенными числовыми множествами школьного курса математики являются арифметическая и геометрическая прогрессии.

ЛЕКЦИЯ
по теме «Элементы математической логики»

Те из вас, кто интересовался различными занимательными задачами и головоломками, не раз встречали задачи, в которых по некоторым высказываниям участников надо определить тот или иной признак, присущий каждому персонажу, или выяснить, какие из описанных в задаче поступков совершил каждый из участников. Например, беседуют трое — Белокуров, Рыжов, Чернов. Брюнет сказал Белокурову: «Интересно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — шатен, но ни у одного цвет не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих? Такого рода задачи не относятся ни к алгебре, ни к геометрии. В ходе их решения не надо ничего вычислять и строить чертежи. Эти задачи относятся к логическим, и их решение зависит от умения правильно рассуждать.

Математическая логика — это раздел математики, основанный на использовании методов алгебры для изучения объектов не числовой природы и являющийся средством научного исследования. Слово «логика» произошло от греческого logos, что означает слово, понятие, рассуждение, разум. Законы и правила формальной логики необходимо знать для построения правильных рассуждений. Логические знания чрезвычайно важны для повышения эффективности мыслительной деятельности человека и предотвращения логических ошибок. Согласно основному принципу логики, правильность рассуждения (вывода) определяется только его логической формой (структурой) и не зависит от конкретного содержания, входящих в него утверждений. Например, рассуждения «Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен» и «Все металлы электропроводны. Медь — металл. Следовательно, медь электропроводна» имеют одинаковую логическую структуру, называемую силлогизмом. Отличительная особенность правильного вывода состоит в том, что из истинных исходных утверждений всегда получаются истинные заключения.

Как самостоятельная наука, логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384-322 г.г. до н.э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться традиционной или Аристотелевой логикой. Традиционная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий. В XIX в. - начале XX в. в логике произошла научная революция и на смену традиционной логике пришла современная логика, называемая также математической или символической логикой. Большой вклад в развитие математической логики внесли немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646-1716) и англичанин Джордж Буль (1815-1864), сумевший применить к логике язык символов и формул.

Итак, логика работает с высказываниями. Назовем высказыванием любое утверждение, сформулированной в повествовательной форме, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно. Высказывания принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Рассмотрим в качестве примера некоторые утверждения и выделим среди них высказывания. Пусть утверждение А означает: «Марс является планетой Солнечной системы». Это утверждение можно рассматривать с позиции истинности или ложности, а значит, следует считать высказыванием. Утверждение «Кислород является металлом» - также высказывание, но ложное. А вот выражения «Который час?», «Война и мир» нельзя считать высказываниями, так как эти утверждениияне представляется возможным рассматривать с позиций их истинности или же ложности. По этой же причине определение «Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом» не может быть высказыванием.

Простейшие высказывания могут образовывать сложные путем выполнения над ними логических операций. Истинность сложных высказываний зависит от истинности простых, а также от вида логических операций, выполняемых над простыми высказываниями. Обычно значение истинности высказывания обозначают 1 (в некоторых источниках И), а ложности — 0 (Л).

Отрицанием высказывания А называется высказывание, обозначаемое ¬А, которое истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно. В русском языке операция отрицания выражается словами «не А». Например, для упомянутого выше высказывания «Марс является планетой Солнечной системы» его отрицание ¬А будет следующим - «Марс не является планетой Солнечной системы». Истинность высказываний А и ¬А может быть представлена следующей таблицей истинности:

A	¬A
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое А∧В, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Конъюнкция выражается словами «А и В». Истинность высказываний А, В и А∧В может быть представлена следующей таблицей истинности:

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое А∨В, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний А или В. Дизъюнкция выражается словами «А или В». Истинность высказываний А, В и А∨В определяется следующей таблицей истинности:

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Как и в алгебре числовых величин, в алгебре высказываний выделяют приоритеты выполнения логических операций: самая старшая операция — отрицание, следующая — конъюнкция, затем — дизъюнкция, импликация и эквиваленция. В необходимых случаях используют скобки.

Импликацией двух высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое А=>В, которое ложно лишь при условии, что А истинно, а В — ложно. Импликация выражается словами «Если А, то В». Истинность высказываний А, В и А=>В приводится в следующей таблице:

A	B	B=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Высказывание А в импликации называется *условием (посылкой, антецедентом)*, высказывание В — *заключением (выводом, консеквентом)*. Из истинных условий заключение может оказаться ложным; из ложных же условий заключение может оказаться истинным или ложным. Из неверного условия следует все что угодно. Это важный практический вывод о возможностях использования импликации высказываний. Конечно, в обыденной практике трудно представить себе не связанные по смыслу общим содержанием высказывания А и В, образующие импликацию. Однако нас интересует, как одно высказывание следует из другого, независимо от их содержания. Вот почему импликации, наряду с другими логическими операциями, следует воспринимать шире, чем традиционные формы возможности разговорной речи.

Эквиваленцией двух высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое A<=>B, которое ложно, когда одно из высказываний истинно, а другое ложно, и истинно, когда оба высказывания A и B либо истинны, либо ложны. Эквиваленция выражается словами «A тогда и только тогда, когда B». Истинность высказываний A, B и A<=>B представлена в следующей таблице:

A	B	A<=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Истинность сложных высказываний доказывается путем составления таблиц истинности для этих высказываний.

Для высказываний, также как и для числовых величин, работают переместительный, сочетательный и распределительный законы.

1. $(A \lor B) \Leftrightarrow (B \lor A)$
2. $(A \land B) \Leftrightarrow (B \land A)$
3. $(A \land (B \land C)) \Leftrightarrow ((A \land B) \land C)$
4. $(A \lor (B \lor C)) \Leftrightarrow ((A \lor B) \lor C)$
5. $(A \land (B \lor C)) \Leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$

Эти законы называют тавтологиями. В обыденном смысле тавтология означает повтор ранее уже сказанного, а потому не очень интересное рассуждение. В математике же тавтологии являются ключом к построению доказательств теорем, основой выполнения умозаключений. Заведомо ложное высказывание, которое при поверхностном рассмотрении кажется правильным, называется софизмом. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики. Это отличает его от паралогизма и апории, которые могут содержать непреднамеренную ошибку либо вообще не иметь логических ошибок, но приводить к явно неверному выводу.

Составим таблицу истинности для следующего высказывания: $(A \lor B) \land \neg C$.

В данном высказывании три логические переменные A, B, C, значит количество строк равно $2^3=8$. В высказывании три логические операции. Расставим порядок действий 1) $A \lor B$; 2) $\neg C$; 3) $(A \lor B) \land \neg C$. Количество столбцов таблицы равно 3+3=6.

A	B	C	A∨B	¬C	(A∨B)∧¬C
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

ЛЕКЦИЯ
по теме «Элементы комбинаторики»

В знаменитой басне И.А. Крылова «Квартет» «... проказница Мартышка, Осел, Козел да косолапый Мишка» устроили любопытный эксперимент: они исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения: «... ты с басом Мишенька садись против альта, я, прима, сяду против вторы, тогда пойдет уж музыка не та. У нас запляшут лес и горы». И если бы не вмешался Соловей, участники квартета, наверное, перепробовали бы все возможные варианты. Зададимся и мы вопросом: а сколько существует способов, чтобы рассадить, например, в один ряд четырех музыкантов?

Рассмотрим такой вопрос. Воспетый В.В. Маяковским «серпастый, молоткастый, советский паспорт» имел серию и номер, состоящих в общей сложности из трех частей: некоторое число, записанное римскими цифрами; две буквы русского алфавита; шесть арабских цифр. Например, IV ГН 702175. Разумеется, паспорт каждого гражданина СССР должен был отличаться от любого другого паспорта. Сколько же может быть различных паспортов?

Третья ситуация. Вас приглашают сыграть в «Лотто-Миллион». Суть игры состоит в том, что необходимо из 49 номеров угадать 6, которые выпадут во время очередного тиража. Для участия в игре следует приобрести карточку и вычеркнуть в ней любые шесть квадратов, пронумерованных числами от 1 до 49. Чтобы выиграть наверняка, можно было бы запастись таким количеством карточек, которое необходимо для вычеркивания шести квадратов всеми возможными способами. Сколько же таких способов? Сколько понадобится всего карточек?

Этими вопросами занимается раздел математики, который называется комбинаторика. Вообще комбинаторика — это раздел математики, который изучает какие и сколько комбинаций можно составить из определенного числа материальных объектов, называемых элементами. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, что означает «сочетать», «переставлять». «Особой приметой» комбинаторных задач является вопрос, который всегда можно сформулировать так, чтобы он начинался словами «Сколькими способами... ?» В описанных выше ситуациях рассматриваются три типа комбинаций, которые можно составить из некоторого числа n различных между собой элементов.

Рассмотрим первую комбинацию *перестановки*. Возьмем n различных элементов A, B, C, …, M; будем переставлять эти элементы всеми возможными способами, оставляя неизменными их число и меняя лишь порядок. Каждая из таких комбинаций называется *перестановкой из* *n элементов*. Число всех различных перестановок из n элементов обозначается P_n. Это число равно произведению всех натуральных чисел до n включительно, т. е. $P_n=1*2*3*...*n$ или $P_n=n!$ Символ n! (читается: эн факториал) — сокращенное обозначение произведения всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Таким образом, возвращаясь к басне «Квартет», мы получим, что горе-музыканты могли пересаживаться $P_4=4!=1*2*3*4=24$.

Рассмотрим следующую комбинацию. Будем составлять из n различных элементов группы по m элементов в каждой, располагая взятые m элементов в определенном порядке. Каждое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется *размещением из n элементов по m элементов*. Число всех различных размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m и находится по формуле $A_n^m=n!/(n-m)!$ Решая вопрос с количеством паспортов для граждан СССР, необходимо воспользоваться именно этой формулой.

Вернемся снова к игре «Лотто-Миллион» и выясним, сколько же необходимо купить билетов, чтобы перебрать все возможные варианты и выиграть миллион? Из n различных элементов будем составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов внутри группы. Любое множество из n элементов по m элементов в каждом (различными считаются те, которые имеют неодинаковый состав элементов) называется *сочетанием из n элементов по m элементов*. Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и находится по формуле $C_n^m=n!/(m!*(n-m)!)$. Используя эту формулу, получим $C_{49}^6=49!/(6!*43!)$ = $(44*45*46*47*48*49)/(1*2*3*4*5*6)=(44*45*46*47*49)/15=44*3*46*47*49$ =13 983 816. Таким образом, нужно купить и заполнить почти 14 млн. карточек. И даже если стоимость одной всего рубль, то только на приобретение карточек придется потратить почти 14 млн. рублей. В случае, если число выбранных элементов равно общему числу элементов, то в знаменателе формул получается 0! Запомним, что 0!=1.

В ходе решения комбинаторных задач на использование формул размещений и сочетаний всегда нужно помнить о том, что при нахождении числа сочетаний порядок в выбранных подмножествах *не учитывается*, а вот при нахождении числа размещений порядок в таких подмножествах *очень важен*.

В заключении раздела комбинаторики отметим еще одну формулу, которая широко применяется во многих расчетах как в теории вероятностей, так и математической и прикладной статистике. Речь идет о натуральной степени бинома. Бином — это выражение (a+b). Из курса алгебры средней школы известно, что $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. А как найти четвертую, пятую и более высокие степени бинома? Для нахождения натуральной степени бинома $(a+b)^n$

используется формула, которую вывел английский механик-математик Исаак Ньютон (он и показал как находить бином для любого n, отсюда и название «бином Ньютона»):

$(a+b)^n=a^n+n*a^{n-1}*b+(n(n-1)/1*2)a^{n-2}*b^2+...$.

Здесь коэффициенты при произведениях неизвестных a и b называются биномиальными коэффициентами, которые могут быть найдены через соответствующие сочетания. Но для больших значений n вычисление биномиальных коэффициентов занимает немало времени. Поэтому для их выбора удобно пользоваться треугольником биномиальных коэффициентов, который предложил французский математик Блез Паскаль. Этот треугольник называется *треугольником Паскаля*.

n=1 1 1 n=1
n=2 1 2 1 n=2
n=3 1 3 3 1 n=3
n=4 1 4 6 4 1 n=4
n=5 1 5 10 10 5 1 n=5
n=6 1 6 15 20 15 6 1 n=6
n=7 1 7 21 35 35 21 7 1 n=7
n=8 1 8 28 66 70 66 28 8 1 n=8
n=9 1 9 36 94 136 136 94 36 9 1 n=9
n=10 1 10 45 130 230 272 230 130 45 10 1 n=10

ЛЕКЦИЯ
по теме «Основы теории вероятностей»

Различные области науки сталкиваются со случайными явлениями, когда заранее невозможно предсказать результат опыта. Теория вероятностей занимается изучением закономерностей в случайных явлениях. Хотя исторически зарождение теории вероятностей связано с азартными играми, именно теории вероятностей суждено было сыграть решающую роль в переходе науки от изучения детерминированных явлений и опытов к исследованию случайных явлений и процессов. Большое число случайных явлений и процессов подчиняется определенным закономерностям. Теория вероятностей занимается установлением таких закономерностей. Это позволяет предвидеть, как именно будут протекать случайные явления и процессы.

При изучении закономерностей случайных явлений и процессов теория вероятностей имеет дело с математическими моделями этих явлений и процессов — вероятностными моделями. Многообразие окружающего нас мира требует разработки новых вероятностных моделей. Методы теории вероятностей используются во многих областях науки. Именно теория вероятностей служит обоснованием математической и прикладной статистики. Поэтому так важно владеть всем арсеналом методов теории вероятностей.

Всем видам деятельности человека присущ элемент случайности. Например, студент может прийти на лекцию за пять минут до ее начала, а может опоздать на десять минут или вообще не прийти. При удачном запуске спутника траектория этого спутника в какой-то допустимой степени отличается от той, которая была рассчитана до запуска спутника. На результат любого действия влияет множество случайных факторов. Поэтому человек должен уметь реагировать на случайность.

Теория вероятностей возникла в XVII веке. Одной из причин ее появления была попытка осмыслить результаты всевозможных азартных игр для выработки наилучшей стратегии. Результаты, полученные для игр, оказались очень полезными при изучении других явлений.

А теперь введем необходимые основные понятия. Всякое действие , явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть *испытанием*. Результат этого действия, испытания называется *событием*. Под *опытом* будем понимать выполнение определенных условий, при которых наблюдается изучаемое явление. Стрельба по мишени, бросание игрального кубика или монеты, вынимание шаров из урны — все это примеры опытов. *Событие* - это результат опыта. События обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, … Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном опыте. Например, если в урне лежат только черные шары, то событие *H={извлечен черный шар}*, является достоверным. Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном опыте. Например, если в урне лежат только черные шары, то событие *C={извлечен белый шар}*, является невозможным. Событие называется *случайным*, если оно может произойти, а может не произойти в данном опыте. Например, попадание или промах при стрельбе по мишени, выпадение орла или решки при бросании монеты и т. д. Два события называются *совместными в данном опыте*, если появление одного из них не исключает появления другого. Например, два стрелка стреляют по мишени. Событие *A={попадание в мишень первого стрелка}*, событие *B={попадание в мишень второго стрелка}*. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда оба стрелка попадут в мишень. Два события называются *несовместными в данном опыте*, если появление одного из них исключает появление другого. Например, когда производится выстрел по мишени, то возможно либо попадание, либо промах. Одновременно эти события наступить не могут: они не совместимы.

Множество событий называется *полной группой событий*, если они попарно несовместны (т. е. никакие два из них не могут произойти одновременно) и какое-то из них обязательно произойдет.

Противоположные события — это полная группа из двух событий. Одно из противоположных событий обозначают буквой, другое — такой же буквой с чертой над буквой. События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще других. Каждое равновозможное событие, которое может произойти в данном опыте, называется *элементарным исходом*. Элементарные исходы, при которых наступает некоторое событие, называются *элементарными исходами, благоприятствующими этому событию*.

Вероятностью некоторого события A называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к числу n всех равновозможных исходов опыта P(A)=m/n. Эта дробь всегда правильная, так как число исходов, благоприятствующих появлению какого-либо события, не может быть больше общего числа исходов.

Простейшие свойства вероятности:

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1.
3. Вероятность невозможного события равна 0.
4. Если A — случайное событие, то $0<P(A)<1$.
5. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1.

Действия с вероятностями.

Суммой A+B событий A и B называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из них, т. е. могут появиться либо только событие A, либо только событие B, либо события A и B одновременно.

Теорема. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей: P(A+B)=P(A)+P(B), где A и B — несовместные события.

Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в их одновременном появлении.

Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от появления или непоявления другого. Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: P(AB)=P(A)*P(B), где A и B — независимые события.

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу событий. Ответ дает так называемая формула полной вероятности. Но давайте рассмотрим более простой и наглядный подход — *дерево вероятностей*.

ЛЕКЦИЯ
по теме «Элементы математической статистики»

При проведении различных исследований тщательно и систематически собирается информация. Эта информация нужна для проверки различных идей и теорий. Как правило, сбор и представление информации происходят в числовом виде.

Статистика — это набор различных методов (в основном математических) для организации и управления числовыми данными в целях поисков ответов на вопросы и проверки теоретических предположений. Тщательно собранные и внимательно проанализированные числовые данные представляют собой наиболее объективный фундамент для построения теории и понимания любого вопроса. Даже самые объективные числовые данные не говорят сами за себя. Исследователь должен уметь эффективно использовать статистику для организации, оценки и анализа этих данных. Иначе собранные сведения окажутся бесполезными.

Слово «статистика» происходит от латинского слова status, которое означает «состояние, положение вещей».

Хотя статистика и является одним из основных элементов научного исследования, все же ее роль ограничена. Прежде чем применить какой-либо метод статистического анализа, должны быть успешно завершены все предыдущие этапы. Если допущены серьезные ошибки в разработке плана или в выборе метода исследования, то даже самый совершенный статистический анализ будет бесполезен. Статистика не в состоянии спасти плохо проработанный проект исследования.

Но и некорректное применение статистики может погубить даже безукоризненно выполненный проект исследования. Именно статистика дает возможность анализировать данные, выявлять и изучать тенденции и зависимости, пересматривать и вносить изменения в теории. Поэтому исследователь должен знать о преимуществах и ограничениях наиболее часто используемых статистических методов, уметь интерпретировать статистические показатели и понимать, какие статистические методы подходят для конкретного набора данных и конкретной цели.

Статистика — это наука, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных явлениях, происходящих в природе и обществе. Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей обработке информации. Однако у статистики есть много и других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Ни одна из этих целей не достижима без обработки данных. *Математическая статистика* — раздел математики, посвященный методам и правилам обработки и анализа статистических данных.

Основными статистическими характеристиками (иногда их называют мерами центральной тенденции) являются среднее арифметическое, мода, размах, медиана.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Модой обычно называется число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Если исследователь хочет показать лишь наиболее распространенное значение в распределении, то мода является подходящим для этого показателем.

Размах — это разность наибольшего и наименьшего значений ряда данных. Из-за простоты вычисления размах вариации наиболее полезен, если исследователя интересует быстрый и общий взгляд на изменчивость при сравнении большого количества выборок. Но ведь практически любая выборка содержит *аномальные значения* (нетипично большие и малые значения). Поэтому размах ряда (вариации) может привести исследователя к неверным результатам. Кроме того, по размаху ничего нельзя сказать о значениях, которые расположены между двумя крайними.

Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине. Если ряд состоит из четного количества чисел, то медиану находят как среднее арифметическое двух чисел, стоящих ровно в середине ряда. Всеми этими характеристиками пользуются при условии, что ряд чисел ранжирован (упорядочен, т. е. числа стоят в ряду в порядке возрастания). При этом, если в ряду встречаются одинаковые числа, то их записывают столько раз сколько они встречаются в данном ряду.

Генеральная совокупность — это общая группа предметов, подлежащих статистическому исследованию. Она может быть очень большой, поэтому всю генеральную совокупность физически исследовать невозможно. К тому же затраты на сбор данных во всей генеральной совокупности достаточно высоки, да и риск ошибки многократно возрастает. Кроме того, наблюдение может быть связано с уничтожением исследуемого образца (например, проверка качества пищевых продуктов). Принимая во внимание вышеперечисленные причины, из генеральной совокупности случайным образом отбирают небольшое количество предметов — *выборку*, после изучения которой и делаются выводы о генеральной совокупности.

Как по анализу элементов, содержащихся в капле крови, медики делают выводы о составе крови человека, так и с помощью выборки изучаются явления, характерные для всей генеральной совокупности. Выборка должна быть сформирована случайным образом (например, по таблице случайных величин). Таблица случайных величин представляет собой последовательность цифр в виде таблицы, в которой каждая из цифр от 0 до 9 встречается независимо друг от друга с вероятностью 0,1. Также выборка должна быть репрезентативной, то есть давать правильное представление о генеральной совокупности. Примером такой выборки является любой социологический опрос.

Методы сбора и обработки числовых данных в каких-либо конкретных областях науки составляют предмет соответствующей специальной статистики, например физической, спортивной, звездной, экономической, медицинской, демографической и т. д. Формальная математическая сторона статистических методов анализа, не зависящая от специфики изучаемых объектов и конкретной области знаний, составляет предмет собственно математической статистики. Статистическое наблюдение — это сбор необходимых данных по явлениям и процессам общественной жизни. Можно провести опрос общественного мнения, найти центральные тенденции ряда данных: среднее арифметическое, моду, размах, медиану; дать интерпретацию результатам статистических исследований и наглядно представить полученную информацию. Но это не всякий сбор данных, а лишь планомерный, научно организованный, систематический и направленный на регистрацию признаков, характерных для исследуемых явлений и процессов. От качества данных, полученных на первом этапе, зависят конечные результаты исследования. Для изучения различных общественных и социально-экономических явлений, а также некоторых процессов, происходящих в природе, проводят специальные статистические исследования. Применяют следующие методы исследования: анкетирование, анализ литературы, статистический опрос, статистическая обработка полученных данных, анализ, сравнение полученных результатов. Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе.

Собранную и обработанную информацию необходимо наглядно представить. Для этого можно использовать создание статистической таблицы, а также построение полигона, круговой диаграммы, гистограммы, столбчатой (столбиковой) диаграммы.

Результаты сводки и группировки материалов статистического наблюдения, как правило, излагаются в виде *статистических таблиц*. Таблица является наиболее рациональной, наглядной и компактной формой представления статистического материала. Однако не всякая таблица может быть статистической. Таблица умножения, таблица квадратов натуральных чисел, таблица натуральных логарифмов, опросный лист социологического исследования могут носить табличную форму, но статистическими они не являются. Статистическую таблицу от других табличных форм отличает следующее: она должна содержать результаты подсчета эмпирических данных и являться итогом сводки первоначальной информации. Таким образом, статистической называется таблица, которая содержит сводную числовую характеристику исследуемой совокупности по одному или нескольким существенным признакам, взаимосвязанным логикой экономического анализа. Статистическая таблица содержит три вида заголовков: общий, верхний и боковые. Общий заголовок отражает содержание всей таблицы (к какому месту и времени она относится), располагается над ее макетом по центру и является внешним заголовком. Верхние заголовки характеризуют содержание граф (столбцов), а боковые — строк. Они являются внутренними заголовками. Остов таблицы, заполненный заголовками, образует ее макет. Если на пересечении граф и строк записать числа, то получается полная статистическая таблица. Числовой материал может быть представлен абсолютными (численность населения РФ), относительными (индексы цен на продовольственные товары) и средними (среднемесячный доход служащего коммерческого банка) величинами. В случае необходимости статистические таблицы могут сопровождаться примечанием, используемым с целью пояснения заголовков, методики расчета некоторых показателей, источников информации и др.

Рассмотрим следующую ситуацию. На праздничном вечере среди учеников 11-х классов провели лотерею. Каждый из 50 школьников произвольно задумал одно число от 0 до 10 и записал его на левой и правой половинках лотерейного билета. Правые половинки билета остались у их владельцев, а левые половинки положили на стол перед организатором лотереи. Итак, на столе 50 листочков, содержащих всю необходимую информацию. Как в ней разобраться?

Первое, что необходимо сделать с такой разрозненной информацией, - это как-то ее упорядочить и сгруппировать. Разложим все 50 ответов по кучкам: в одну с ответами «0», в другую — с ответами «1» и т. д. После такой перегруппировки результаты соберем в таблицу, и общая картина распределения собранных данных становится абсолютно ясна:

Ответ											0
Количество ответов						0					

Как наглядно представить обработанную информацию?

Можно построить *__полигон__*. Для этого в декартовой системе координат по оси абсцисс откладываем сами ответы, по оси ординат — их количество, а на координатной плоскости отмечаем точки с координатами (0;2), (1;5), (2;3) и т. д. Отмеченные одиннадцать точек для наглядности соединяем ломаной. Получился *__полигон__* или *__многоугольник распределения__*.

Второй вариант наглядного представления обработанной информации *гистограмма*. Снова работаем в декартовой системе координат. Вертикальный отрезок с концами в точках (0;0) и (0;2) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика ширина которого равна 1, а высота 2. Точно так же следующий вертикальный отрезок с концами (1;0) и (1;5) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного столбика, ширина которого 1, а высота 5, и т. д. Полученная столбчатая диаграмма называется *гистограмма распределения*.

Третий вариант наглядного представления обработанной информации состоит из круга, разделенного на 11 секторов, внутри каждого сектора указан соответствующий ему ответ. Сектор «0» занимает 1/25 часть круга, так как два полученных ответа «0» составляют 2/50=1/25 часть от общего числа всех ответов 50. Значит, центральный угол сектора «0» равен 360^0:25=$14,4^0$. Аналогично рассчитывается величина остальных секторов. Таким образом, мы построили *круговую диаграмму распределения*.

Подведем предварительные итоги. На конкретном примере мы разобрали основные этапы простейшей статистической обработки данных: упорядочивание и группировка данных измерений; составление таблицы распределения данных; построение графика распределения данных, гистограммы или круговой диаграммы. К этим трем этапам добавляют еще один — получение паспорта данных измерений, который состоит из основных числовых характеристик полученной информации. Найдем некоторые числовые характеристики для разобранного выше измерения.

Объем измерения. В данном случае объем измерения равен 50, так как обрабатывались ответы 50 участников. *Размах измерения*. В данном случае он равен 10, т. е. разность между наибольшим (10) и наименьшим (0) результатами измерения равна 10. *Мода измерения*. Она равна 5, так как ответ «5» - самый «модный», самый популярный, он встретился чаще других — 10 раз из 50 результатов. *Среднее (среднее арифметическое)*. Это частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения. Среднее удобно вычислять после того, как составлена таблица распределения. В нашем случае вычисления выглядят так: (0*2+1*5+2*3+3*9+4*4+5*10+6*3+7*5+8*3+9*5+10*1)/50=

=(0+5+6+27+16+50+18+35+24+45+10)/50=236/50=4,72.

Чаще всего результатами измерения являются числа. Каждое число, встретившееся в конкретном измерении, называют вариантой измерения. Использование женского рода слегка непривычно, но именно такой термин принят в статистике. Среднюю варианту в ранжированном ряду называют медианой измерения. В нашем случае она равна 5. *Кратностью варианты* называют число, которое показывает сколько раз эта варианта встретилась в конкретном измерении. <u>*Частота варианты*</u> есть отношение ее кратности к объему. Разумеется, частоту варианты можно измерять и в процентах, т. е. полученное выше отношение умножить на 100%. Используя вновь введенные понятия, можно составить <u>*таблицу распределения данных измерения*</u>.

	Варианта											Сумма
											0	
Кратность						0						50

Таблицу распределения данных можно дополнить частотой варианты, которая находится как отношение кратности варианты к объему (сумме) измерений.

Задача. *На уроке физической культуры 14 школьников прыгали в высоту, а учитель записывал их результаты. Получился следующий ряд данных(в сантиметрах):*
125,110,130,125,120,130,140,125,110,130,120,125,120,125.

Необходимо сгруппировать данные, составить таблицу их распределения, найти размах, моду, среднее арифметическое и медиану измерения.

Решение.

Выпишем все варианты измерения в порядке неубывания, разделяя пробелами группы одинаковых результатов: 110,110   120,120,120 125,125,125,125,125   130,130,130   140. Получили сгруппированный (ранжированный) ряд данных. Размах измерения равен 140-110=30. Мода измерения — 125. Если двигаясь по сгруппированному ряду слева направо отсчитать половину результатов, т. е. 7, мы остановимся на результате 125 см. Следующая половина также начинается со 125 см. Значит, 125 — медиана измерения. Среднее найдем как среднее арифметическое 14 чисел:
*(2*110+3*120+5*125+3*130+1*140)/14=*

=(220+360+625+390+140)/14=1735/14=
=123,9≈124.

Составляем таблицу распределения:

	Варианта					Сумма
	110	120	125	130	140	
Кратность	2	3	5	3	1	14

Частота	0,14	0,21	0,36	0,21	0,07	1(0,99)
Частота, %	14	21	36	21	7	100(99)

Далее наглядно изобразим обработанную информацию: построим полигон, гистограмму и круговую диаграмму распределения данных.

Статистическая вероятность - это вероятность события, рассчитанная опытным путем. Используется в случае невозможности посчитать вероятность наступления события с помощью формулы p(A) = m/n из-за трудностей представления результатов испытаний в виде совокупности элементарных равновозможных исходов. Помимо уже известных нам свойств вероятности к свойствам статистической вероятности добавляется еще одно - *свойство устойчивости* статистической вероятности, состоящее в том, что при различных сериях опытов частота наступления некоторого события мало отличается от обычной вероятности события (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа называемого статистической вероятностью.

ЛЕКЦИЯ
по теме «Положительные скалярные величины и их измерение»

Величина — одно из основных математических понятий. Под величиной понимают свойства объектов, которые допускают сравнение ($<$, $>$, $=$) и которым можно поставить в соответствие некоторую количественную характеристику. Форма, цвет, материал не являются величинами, так как они не допускают сравнения (например, нельзя сказать «более деревянный» или «менее деревянный»). Длина отрезка, площадь фигуры, масса тела — величины.

Величины классифицируют следующим образом: скалярные, которые определяются только числовым значением, и векторные, которые определяются числовым значением и направлением; аддитивные (это величины, допускающие сложение; к ним относятся длина отрезка, площадь фигур, объем тела) и неаддитивные (это величины не допускающие сложения; к таким величинам относятся температура, плотность); однородные, выражающие одно и тоже свойство объектов (длина стороны треугольника и его периметр), и неоднородные, выражающие разные свойства объектов (периметр и площадь треугольника).

Аксиомы положительных скалярных величин.

1. Любые две положительные скалярные величины можно сравнить. Если a и b однородные положительные скалярные величины, то для них справедливо одно из трех утверждений: $a=b$, $a<b$, $a>b$.
2. Любые однородные положительные скалярные величины можно складывать. В результате получится величина того же рода.
3. Из большей положительной скалярной величины можно вычесть меньшую положительную скалярную величину однородную ей. В результате получится величина того же рода.
4. Любую положительную скалярную величину можно умножить на положительное действительное число. В результате получится величина того же рода.
5. Любую положительную скалярную величину можно разделить на величину однородную ей. В результате получится положительное действительное число.

Положительной скалярной величине можно поставить в соответствие количественную характеристику — численное значение (меру) при выбранной единице измерения. Отыскать численное значение величины возможно в результате ее измерения. Измерение положительных скалярных величин — это процесс установления отображения из множества положительных скалярных величин V_+ во множество положительных действительных чисел R_+. В результате такого отображения каждой положительной скалярной величине ставится в соответствие положительное действительное число, которое называют численным значением величины или мерой. Процесс измерения величин строится по-разному для каждого множества измеряемых объектов, но при этом имеются следующие общие моменты: в каждом множестве измеряемых объектов выбирается один и называется единичным; величине единичного объекта ставится в соответствие положительное действительное число 1; величина измеряемого объекта делится на величину единичного объекта, в результате получается положительное действительное число — численное значение (мера) величины измеряемого объекта при выбранной единице измерения. Обозначается это так: me(a) — мера величины a при единице измерения e. В процессе измерения используются следующие свойства:

1. me(e)=1 свойство меры единичного объекта.
2. (a=b) => (me(a)=me(b)) свойство инвариантности меры, т. е. равным величинам соответствуют равные положительные действительные числа.
3. (c=a+b) => me(c)=me(a)+me(b) свойство аддитивности меры.
4. me(a)=me1(a)*me(e1) свойство мультипликативности меры, которое позволяет переходить от одних единиц измерения к другим.

Метрическая система выросла из постановлений, принятых Национальным собранием Франции в 1791 и 1795 годах по определению метра как одной десятимиллионной доли одной четверти земного меридиана от Северного полюса до экватора (парижский меридиан). Определяя метр как десятимиллионную долю четверти земного меридиана, создатели метрической системы стремились добиться инвариантности и точной воспроизводимости системы. За единицу массы они взяли грамм, определив его как массу одной миллионной кубического метра воды при ее максимальной плотности. Для облегчения применения новых единиц в повседневной практике были созданы металлические эталоны, с предельной точностью воспроизводящие указанные идеальные определения. Точность сравнения металлических эталонов друг с другом гораздо выше точности сравнения любого подобного эталона с массой соответствующего объема воды. Международная комиссия по метру в 1872 году постановила принять за эталон длины «архивный» метр, хранящийся в Париже. Точно так же члены Комиссии приняли за эталон массы «архивный» платино-иридиевый килограмм. 20 мая 1875 года семнадцать стран подписали Метрическую конвенцию, и этим соглашением была установлена процедура координации метрологических эталонов для мирового научного сообщества через Международное бюро мер и весов и Генеральную конференцию по мерам и весам.

Метрическая система мер была допущена к применению в России в необязательном порядке законом от 4 июня 1899 года, проект которого был разработан Д.И. Менделеевым, и введена в качестве обязательной декретом Временного правительства от 30 апреля 1917 года, а для СССР — постановлением СНК СССР от 21 июля 1925 года.

На основе метрической системы была разработана и принята в 1960 году XI Генеральной конференцией по мерам и весам Международная система единиц (СИ). В течение второй половины XX века большинство стран мира перешло на систему СИ. Некоторые единицы, не входящие в СИ, по решению Генеральной конференции по мерам и весам «допускаются для использования совместно с СИ».

Единица	Обозначение		Величина в единицах СИ
	русское	международное	
минута	мин	min	60 с
час	ч	h	60 мин=3600 с
сутки	сут	d	24 ч=86400 с
литр	л	I, L	1/1000 $м^3$
тонна	т	t	1000кг
ар	а	a	10^2 $м^2$
гектар	га	ha	10^4 $м^2$

Никакие измерения не могут быть абсолютно точными. Измеряя какую-либо величину, мы всегда получаем результат с некоторой погрешностью (ошибкой). Другими словами, измеренное значение величины всегда отличается от ее истинного значения. Задачей экспериментатора является не только нахождение самой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности. В зависимости от свойств и причин возникновения различают систематические и случайные погрешности и промахи. *Систематическими* называют погрешности, которые при многократных измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов, остаются постоянными. Систематические погрешности могут быть обусловлены неисправностью или неправильной работой на используемых приборах; не совершенство используемой методики измерения; неучет постоянных факторов, влияющих на исследуемое явление. Помимо погрешностей, возникаюших в процессе измерений, систематическими являются погрешности, связанные с применением приближенных формул. В школьном курсе алгебры предлагаются следующие формулы для выполнения приближенных вычислений:

$$f(x)\approx f(x_0) + f^{/}(x_0)\Delta x;\ \sqrt{}1+\Delta x\approx 1 + S\Delta x;\ (1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x.$$

После выявления причин систематическую погрешность можно устранить, вводя соответствующую поправку. <u>*Случайными*</u> называют погрешности, которые при многократных измерениях в одинаковых условиях изменяются непредсказуемым образом. Случайные ошибки обусловлены множеством неконтролируемых причин, действие которых неодинаково в каждом опыте.

Для расчета величины погрешности часто находят абсолютную и относительную погрешности. Если $\underline{a}$ точное значение некоторой величины, а $\underline{a^*}$ известное приближение к нему, то абсолютной погрешностью приближения $\underline{a^*}$ называют некоторую величину $\underline{\Delta(a^*)}$, про которую известно, что она удовлетворяет неравенству $\Delta(a^*) \geq |a^* - a|$. Относительной погрешностью называют некоторую величину $\underline{\delta(a^*)}$, про которую известно, что она удовлетворяет неравенству $\delta(a^*) \geq \Delta(a^*)/a^*$. Относительную погрешность часто выражают в процентах. Она дает более точное представление о величине ошибки, содержащейся в некоторой величине.